Tema 10 : Distribuciones fundamentales de probabilidad

Ya hemos visto que los fenómenos naturales siguen el modelo indeterminista, es decir las leyes del azar, entendido como la combinación de múltiples factores, en gran parte desconocidos e incontrolables, que conducen a resultados no previsibles de antemano, aunque sí conocidos, que se caracterizan por su variabilidad en los diferentes individuos. A cada uno de los posibles resultados se asocia una probabilidad, que en sucesos sencillos o poco complejos es fácil de calcular por las leyes básicas o fundamentales de la probabilidad, pero al aumentar la complejidad el cálculo se hace muy difícil o imposible. Entonces hay que recurrir a una serie de modelos teóricos, las llamadas distribuciones o leyes fundamentales de la probabilidad, que nos permiten hacer el cálculo con relativa facilidad. Al aumentar el nº de individuos todas las distribuciones se van aproximando y acaban confluyendo y haciéndose una en el infinito.

Clasificación

- a) para variables discretas
 - --D. binomial
 - --D. polinomial
 - --D. de Poisson
 - -- D. hipergeométrica
- b) para variables continuas
 - --D. normal
 - --D. de la t de Student
 - --D. de la χ^2 de Pearson
 - --D. de la F de Snedecor-Fisher

Para todas valen los principios que ya conocemos:

$$0 \le p \le 1$$
$$p + q = 1$$
$$\Sigma p(x) = 1$$

En este tema nos ocuparemos de las distribuciones binomial, de Poisson, normal y hipergeométrica. En el Anexo se verán la t de Student, la χ^2 y la F. No veremos la polinomial.

DISTRIBUCION BINOMIAL

Concepto

es el modelo básico de distribución de las variables discretas (o discretizadas), que como ya sabemos pueden ser reducidas en última instancia a dicotómicas.

Experimentos binomiales

Pueden ser elementales y complejos

Los <u>elementales</u> tienen dos resultados posibles: <u>Éxito</u> (cuando aparece el resultado que se pretende) y <u>fracaso</u>, que puede ser único o múltiple. Sus probabilidades respectivas son p y q

En los **complejos** --el experimento elemental se repite n veces

- --obteniendo r éxitos (de 0 a n) : $0 \le r \le n$
- --cada modalidad de la variable va asociada a una r . Como r empieza en 0 siempre hay n+1 modalidades: la de r=0 y las de r entre uno y n.
- -- un experimento binomial complejo puede repetirse N veces. Cada modalidad aparecerá Nr veces.

Notación

La distribución suele designarse como DB, pero cuando se dan los parámetros típicos, la n y la p del suceso elemental, se utiliza sólo B . Así: B(n,p)

Algunos ejemplos:

Experimento	Éxito	p	n	r	notación
elemental: lanzar 1 moneda	salir cara	0,5	1	0,1	B(1 , 0,5)
complejo: lanzar 4 monedas	salir cara	0,5	4	0,1,2,3,4	B(4 , 0,5)
elemental: lanzar un dado	salir 1	1/6		0,1	B(1 , 1/6)
complejo: lanzar 5 dados	salir 1	1/6		0,1,2,3,4,5	B(5 , 1/6)
elemental: familia con 1 hijo complejo: familia con 4 hijos	ser chica ser chica	0,5 0,5		0,1 0,1,2,3,4	B(1 , 0,5) B(4 , 0,5)

El lanzamiento de las 4 monedas se puede repetir N veces.

O podemos estudiar N familias de 5 hijos.

Cálculo de las p de r

 $p(r) = \binom{n}{r} p^{r} q^{n-r} = \frac{n!}{r! * (n-r)!} p^{r} q^{n-r}$

- $\binom{n}{r}$ da los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton
- 2) tablas (en la pagina 16 hay una para $n \le 8$ y ciertos valores de p)
- 3) Método intuitivo (la clásica "cuenta de la vieja") posible en algunos casos.

Gráfico : diagrama de barras

Otros parámetros

Media o esperanza matemática: $\overline{X} = np$

la media representa el nº esperado de éxitos en el experimento

Varianza: $s^2 = npq$

y por tanto, desviación estándar: $s = \sqrt{npq}$

n,p,NvNr

conviene insistir en estos símbolos que son básicos en la DB.

 ${\bf n}$: veces que se repite el suceso elemental en un experimento binomial. Si ${\bf n}$ =1 es un experimento simple; si >1, es complejo

p : probabilidad del suceso elemental

N : veces que se repite el experimento complejo. Si no se dice nada, N=1

 N_r : frecuencia de cada modalidad tras N repeticiones. $\Sigma N_r = N$

----Si <u>tiramos una moneda 1 vez</u>, es una B(1, 0,5). Podemos obtener 0 ó 1 cara (r). N=1

Si <u>este experimento lo repetimos 3000 veces</u> (N) seguirá siendo una B(1, 0,5) pero con N=3000. r sigue valiendo 0 y 1. Nos pueden salir p.e. 1450 caras. Entonces $N_0 = 1550$ y $N_1 = 1450$

----Si <u>tiramos de una vez 3000</u> monedas pueden salir entre 0 y 3000 caras (r). Es una B(3000,

0,5) ; n=3000 ; N=1 Si obtenemos 1450 caras (c), habrá habido 1550 cruces (k). Como sólo se hace una vez, se suele asimilar al caso anterior y se dice que $\,N_0=1550\,$; $\,N_1=1450\,$, aunque realmente no es correcto. Mejor sería N_c y N_k

----Si <u>tiramos tres monedas 1000 veces</u> y obtenemos 0 caras en 115 ocasiones, una cara en 380, dos caras en 370 y tres caras en 130: es una B(3 ; 0,5) , $\,$ n=3 , N=1000 , N₀=115 , N₁=380 ,

 $N_2 = 370 \text{ y } N_3 = 130$

Problemas asociados a la DB

- 1) calcular p(r): nos pueden pedir el cálculo de una r en concreto o de todas ellas. Como ejemplo vemos la p de 2 caras lanzando 3 monedas. Es B(3, 0,5)
- 1- aplicando la fórmula (de las dos que se han visto la más fácil es la segunda)

$$p(r=2) = \frac{3!}{2!*1!}0,5^20,5^1 = 0,3750$$

2- consultando la tabla (ver página 16) ya que en este caso se puede utilizar. Es una tabla de doble entrada con valores de n y r en la primera columna y ciertos valores de p en la primera fila.

En una B(3, 0,5)
$$p(r=2) = 0.3750$$

3- método intuitivo ("cuenta de la vieja"). Válido para una p elemental de 0,5. Veremos no sólo la p(r=3) sino todas las p(r). Hay que considerar todas las combinaciones posibles de cara (c) y cruz (k)

r	modalidades	$\binom{n}{r}$	p(r)
0	k k k	1	1/8
1	c k k k c k k k c	3	3/8
2	сск скс ксс	3	3/8
3	ссс	1	1/8
Σ		8	1

$$3/8 = 0.3750$$

2) **calcular** N_r : es decir, la frecuencia de cada modalidad al repetir el experimento binomial N veces $N_r = N p(r)$

Si el lanzamiento de las 3 monedas se repite 200 veces, teóricamente se obtendrán lo siguiente:

 $\begin{array}{lll} 0 \ caras : & N_0 = 200 * 1/8 = 25 \\ 1 \ cara : & N_1 = 200 * 3/8 = 75 \\ 2 \ caras : & N_2 = 200 * 3/8 = 75 \\ 3 \ caras : & N_3 = 200 * 3/8 = 25 \end{array}$

4) calcular la media, varianza, desviación estándar

$$\overline{x} = np$$
 ; $s^2 = npq$; $s = \sqrt{npq}$

En el ejemplo de las monedas:

$$\overline{\mathbf{x}} = 3 * 0.5 = 1.5$$
 $\mathbf{s}^2 = 3 * 0.5 * 0.5 = 0.75$
 $\mathbf{s} = \sqrt{3 * 0.5 * 0.5} = 0.866$

5) calcular los parámetros de una DB, n y p, a partir de las frecuencias de las modalidades, es decir, a partir de Nr

n lo conocemos por los datos que nos dan.

p se calcula a partir de $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{np}$ \mathbf{y} $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\sum (\mathbf{rN}_r)}{\mathbf{N}}$

Ejemplo:

Lanzadas 4 monedas 10000 veces se han obtenido los resultados que se muestran en la tabla: 0 caras en 4096 ocasiones, 1 cara en 4096, 2 caras en 1536, 3 caras en 256 y 4 caras en 16.

r	Nr	r*Nr
0	4096	0
1	4096	4096
2	1536	3072
3	256	768
4	16	64
\sum	10000	8000

$$\overline{x} = \frac{8000}{10000} = 0.8$$
 0'8=4p p=0'2
por tanto es una B(4, 0'2)

- 6) al crecer n la DB se llega a hacer inmanejable y la solución es **aproximarla** a otra Distribución fundamental transformando los parámetros originales en los propios de la distribución a la que se aproxima. Siempre que se cumplan ciertas condiciones.
 - **a la DN**, si p y $q \ge 0.1$ (ó 10% si es %) y np y nq ≥ 5 (ó 10 y 500 si es un %) se verá al tratar la DN
 - **a la DP**, si p o q \leq 0,1 (ó 10% si es %) y np o nq \leq 5 (ó 10 y 500 si es %), aunque algunos admiten np o nq hasta 10 (ó 1000 si es %). Como veremos enseguida la DP es una variante de la DB y su parámetro λ es igual a n*p, por lo que la aproximación es muy fácil.
- 7) **comprobar el ajuste** de unos datos (una distribución real u observada) a una DB ideal Para ello hay que calcular una distribución binomial teórica, que tenga los mismos parámetros que la real. Como partiremos de las frecuencias de cada modalidad, hay que utilizar el procedimiento visto en **5**). Luego se contrastan las frecuencias teóricas con las observadas por medio de una prueba de contraste de frecuencias, cuyo resultado se valora por χ^2 . Si no se encuentran diferencias significativas, el ajuste es bueno, En caso contrario es malo.

Ejemplo: En un lote de 800 piezas cada una de las cuales tiene tres soldaduras se han observado las siguientes frecuencias de defectos de soldadura: 0 defectos en 97 ; 1 defecto en 305 ; 2 defectos en 297 y 3 defectos en 101. Comprobar el ajuste a una DB.

a)
$$\overline{x} = \frac{(0*97) + (1*305) + (2*297) + (3*101)}{800} = 1,5$$
 $p = \frac{1,5}{3} = 0,5$

b) cálculo de una B(3; 0,5) con N=800

r	p(r)	N _r
0	0,125	100
1	0,375	300
2	0,375	300
3	0,125	100
Σ		800

Las p (r) se pueden leer directamente en la tabla de la DB

recordar que
$$N_r = N*p(r)$$

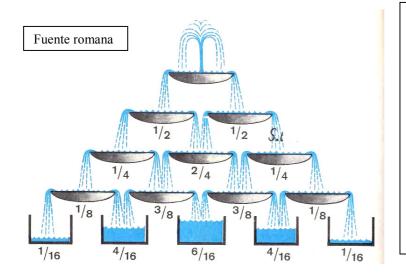
c) Ahora se contrastan las frecuencias observadas y las teórica:

f observadas	97	305	297	101	A simple vista se ve que el ajuste es muy bueno. Aplicando
f teóricas	100	300	300	100	la prueba de contraste que veremos en el tema16 la z=0,213

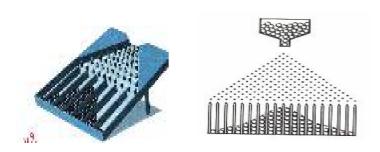
que no es significativa y por tanto el ajuste es bueno.

Modelos clásicos de la distribución binomial

Los más importantes son las fuentes romanas, el aparato de Galton y el triángulo de Pascal.



La mitad del agua que sale por la fuente de arriba cae por cada lado. Y lo mismo ocurre con las demás fuentes. Al final unos recipientes recogen el agua. Siguiendo el camino del agua, se ve que el volumen recogido aumenta hacia en el centro. Una fuente perfecta sigue exactamente la DB. El primer recipiente corresponde a r=0, el 2º a r=1, el 3º a r=2, etc El nº de recipientes por tanto es igual a n+1



El aparato de Galton sigue el mismo principio. Es una especie de embudo inclinado con filas de clavos, situados como las fuentes. Al final hay unos cajones receptores. Se lanza una bola que cada vez que choca con un clavo tiene la misma probabilidad de ir a la derecha que a la izquierda.

1 11 121 1331 14641 15101051 1615201561 172135352171 18285670562881

El triángulo de Pascal empieza por el 1 de la primera fila. Los números de las otras filas se obtienen sumando los dos que están por encima de él a derecha e izquierda. Como en los lados siempre se suma el 1 con nada, todos son 1. Se pueden construir el nº de filas que uno quiera. En cada fila los números corresponden a los coeficientes (n) para cada valor de r, de 0 a n. Por tanto n es igual al nº de coeficientes menos 1. La suma de los coeficientes de cada fila es igual a 2ⁿ

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

también llamada de los sucesos raros o de las probabilidades pequeñas.

Es una variante de la DB cuando p o q son muy pequeñas y n no es muy grande. En esta situación la DB se hace inexacta. La frontera se fija como se ha visto al tratar la aproximación de la DB a una DP en p ó q \leq 0,1 (ó el 10%, si se expresa en %; algunos admiten hasta 0,2 ó 20%) y np ó nq \leq 5 (ó 500 si se expresa como %), aunque últimamente se acepta hasta 10 (ó 1000). Como en origen es una DB, es valido lo que hemos visto sobre n , r , N_r y N .

Aunque un suceso sea raro, ocurre de vez en cuando. Incluso con cierta frecuencia, si aumenta el nº de ocasiones para que ocurra. Ya vimos que la p de acertar 6 en la Primitiva es bajísima, pero como se hacen millones de apuestas, hay muchas semanas con uno o más acertantes. En un determinado cruce puede ser que la probabilidad de que un coche tenga un accidente sea muy baja, pero si el tráfico es muy intenso, puede haber accidentes incluso todos los días.

Al contrario, un hecho frecuente, como las llamadas que se reciben en la centralita telefónica de un hospital, se puede convertir en raro si consideramos las llamadas en una unidad de tiempo muy pequeña, p.e. segundos. En 24 horas quizá en la mayor parte de los segundos no haya ninguna llamada.

¡Fijarse también en q! . Una B(5, 0.98) tiene la q=0.02 y debe ser aproximada a una P(4.9)

Notación

P(λ) , siendo λ = np (λ es la letra griega lambda)

Cálculo de p(r)

$$p(r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

el valor de e $^{-\lambda}$ (e es la base de los logaritmos neperianos) se puede hallar con una calculadora científica o leer en una tabla (página 15). La tabla tiene dos partes: una va de λ entre 0,00 y 0,99 . La otra parte da e $^{-\lambda}$ para valores enteros de λ entre 1 y 10. Para valores con decimales en este intervalo se descompone λ en dos partes: una entera y la otra decimal . Por ejemplo: λ = 3,48 se descompone en 3 y 0,48. Los valores de e $^{-\lambda}$ se pueden leer en la tabla y hay que multiplicarlos, ya que este procedimiento se basa en que el producto de dos potencias de la misma base es otra potencia con la mima base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

Ejemplos: Calcular p(r=3) para una P(0,25) y para una P(3,48)

1)
$$p(r=3) = \frac{0.25^3}{3!}e^{-0.25} = 0.0020$$

2)
$$p(r=3) = \frac{3.48^3}{3!}e^{-3.48} = 7.024*(0.04979*0.6188) = 0.2164$$

Media, varianza y desviación estándar

$$\overline{X} = \lambda = np$$
 $\overline{X} = \frac{\sum (rN_r)}{N}$ $s^2 = \lambda$ $s = \sqrt{\lambda}$

Gráfico : es también el diagrama de barras

Problemas asociados a la DP

son similares a los vistos en la DB, ya que es una variante de la misma.

1) calcular p(r): utilizando la fórmula

- 2) calcular N_r : es decir, la frecuencia de cada modalidad al repetir el experimento N veces $N_r = N * p(r)$
- 3) calcular el parámetro λ a partir de las frecuencias de las modalidades, es decir, a partir de

Nr , utilizando las fórmulas ya conocidas de la DB : $\overline{X} = np$, $\overline{X} = \frac{\sum (rN_r)}{N}$ y $\lambda = np$

- 4) calcular la media, varianza, desviación estándar : $\overline{X} = \lambda = np$; $s = \sqrt{\lambda}$; $s^2 = \lambda$
- 5) comprobar el ajuste de unos datos a una DP

Veremos un ejemplo para comprobar el ajuste de una distribución real a una DP teórica. Sabemos que a partir de los datos que nos den hay que calcular el parámetro λ . Luego se calculan las p teóricas asociadas a cada una de las modalidades deseadas y se multiplican por N, obteniendo de esta forma las N_r teóricas, que hay que contrastar con las observadas mediante la prueba estadística correspondiente.

--El veterinario militar alemán Borotkiewitz estudió las defunciones por coces de caballo en 20 regimientos prusianos durante 10 años("Ley de los pequeños números", 1898). Encontró que seguían la distribución de los sucesos raros de Poisson y que por tanto eran fruto del azar y no eran imputables en principio a fallos de organización.

De los 200 regimientos-año (20*10) hubo 109 que no registraron muertes, 65 con un fallecimiento, 22 con dos, 3 con tres y 1 con cuatro.

Como λ es igual a la media, se utiliza la fórmula ya conocida $\bar{X} = \frac{\sum (rN_r)}{N}$

r	$N_{\rm r}$
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
Σ	200

$$\bar{x} = \frac{(0*109) + (1*65) + (2*22) + (3*3) + (4*1)}{200} = 0,61$$

Hay que desarrollar una P(0,61) con N=200

r	p(r)	$N_{\rm r}$
0	0,543	109
1	0,331	66
2	0,101	20
3	0,021	4
4	0,003	1
Σ		200

Los valores de N_r se presentan redondeados para que se vea mejor a simple vista la comparación con los observados. Para el contraste con las frecuencias observadas habría que dejar dos o tres decimales (esto es válido para cualquier ajuste). La prueba da z=0,465 que no es significativa.

Por tanto el ajuste de esos datos a una DP es bueno

DISTRIBUCION NORMAL

Es la distribución típica de variables aleatorias cuantitativas continuas cuando el tamaño es grande (por consenso, cuando N≥30). Sus parámetros básicos son la media y la desviación estándar. Su desarrollo se debe fundamentalmente a Laplace y Gauss. Quetelet le dió el nombre de normal o natural porque observó que la gran mayoría de variables fisiológicas seguían este modelo. Es un nombre consagrado por el uso y no quiere decir que las otras distribuciones sean "anormales". Los norteamericanos usan y han exportado la denominación de "distribución gaussiana". Siguen la DN todo tipo de variables biológicas (como frecuencia cardíaca, tensión arterial, componentes químicos de la sangre y orina, medidas corporales...), duración o vida de objetos y seres vivos, etc

Notación: $N(\bar{x}, s)$

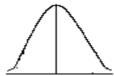
Fórmula

La fórmula para calcular las p asociadas a intervalos de valores (no se pueden calcular p de valores puntuales, ya que en el contexto de la DN son infinitésimos) es muy compleja y necesita integración. Pero afortunadamente no hay que utilizarla, pues se dispone de una tabla de fácil manejo, que nos da el cálculo ya hecho. A título informativo la fórmula es:

$$p(a \le x \le b) = \int_a^b f(x) d(x) , siendo dx = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{s}\right)^2}$$

Representación gráfica

es la curva o campana de Gauss, en "chapeau de gendarme" (gorro de gendarme) de los tiempos napoleónicos. Es el límite de un histograma cuando la amplitud de las clase se hace infinitesimal y el nº de datos tiende a infinito.



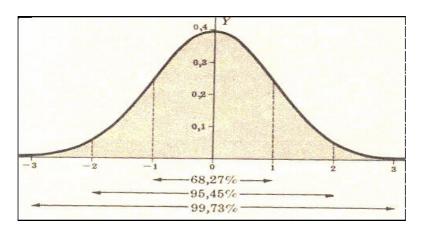
Es <u>simétrica</u> alrededor de un eje vertical que pasa por $\overline{\mathbf{x}}$ y <u>asintótica</u> al eje de abscisas (lo corta en el infinito por ambos lados, aunque a partir de $\overline{\mathbf{x}}\pm 3s$ ya casi lo toca). La campana engloba todos los valores y por tanto la p de que un valor cualquiera esté en ella es 1 ó 100%. La superficie de campana delimitada por dos valores del eje de abscisas equivale a la probabilidad de que un valor cualquiera se encuentre en ese área. Cada distribución tiene su propia campana, hay infinitas curvas de DN. En estas condiciones su manejo sería muy difícil y complicado, ya que habría que aplicar cada vez la fórmula. Afortunadamente se ha encontrado un modelo único de distribución y por tanto de campana al que pueden ser adaptadas todas las DN. Es la llamada DN tipificada.

Tipificación

Consiste en transformar cualquier $N(\overline{x}, s)$ en otra N(0, 1), es decir, en una DN de media 0 y desviación estándar 1. Para ello hay que transformar los valores originales x en puntuaciones estándar o valores tipificados, que aquí llamaremos c. (Otros nombres: z o SDS).

$$c = \frac{x - \overline{x}}{s}$$

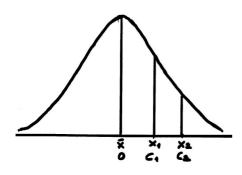
Entre dos valores de c quedan delimitadas áreas (=probabilidad) que se pueden obtener a partir de la <u>tabla de la DN</u> tipificada. Ya se ha dicho al principio que no se pueden calcular p de valores aislados, sólo de intervalos más o menos grandes.



En esta campana están representadas las áreas o probabilidades entre valores de c+1 y -1 , +2 y -2 , +3 y -3 . Pero es preferible expresar la p con números más "redondos" :

- ---Al intervalo entre c = -1.96 y c = 1.96 corresponde un 95% de la superficie de la campana. $p(-1.96 \le c \le 1.96) = 0.95$ ó 95%
- ---Al intervalo entre c = -2.58 y c = 2.58 corresponde un 99% de la superficie de la campana. $p(-2.58 \le c \le 2.58) = 0.99$ ó 99%
- ---Al intervalo entre c=-3,30 y c=3,30 corresponde un 99,9% de la superficie de la campana. $p(-3,30 \le c \le 3,30)=0,999$ ó 99,9%

que son los que utilizaremos aquí.



Es imprescindible dibujar una campana y marcar en ella la media y el valor o valores de x.

Una vez tipificada se anotan el los valores de c. A la media le corresponde siempre por definición el valor de 0.

Tabla de la DN tipificada

El modelo que utilizamos es de media campana, va de 0 a $+\infty$. (Página 10-20). Hay otro con la campana entera, que abarca de $-\infty$ a $+\infty$. Nos da la p de que un valor cualquiera esté entre c=0 y otro valor de c. Al ser la campana simétrica sirve por igual para valores de c positivos o negativos, siempre con dos decimales. Es una tabla de doble entrada. En la primera columna están valores de c con un decimal y en la primera fila está el segundo decimal. Donde confluyen ambos está la probabilidad buscada.

Problemas asociados a la DN

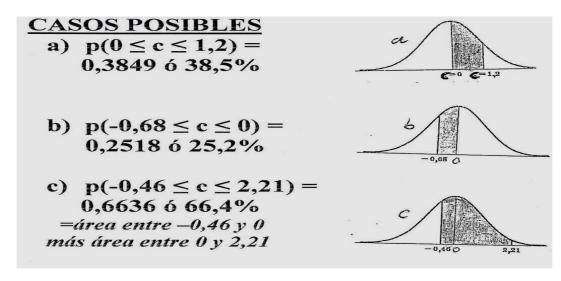
1---tipificar

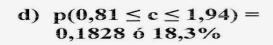
p.e. x=5 y x=3 de una B(4, 2)

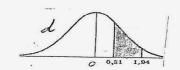
$$\rightarrow$$
 c = (5-4)/2 = 0,5 \rightarrow c = (3-4)/2 = -0,5

2---calcular la probabilidad de un intervalo,

p.e. entre
$$c = 0$$
 y $c = 0.46$
 $\rightarrow p(0 \le c \le 0.46) = 0.1772$

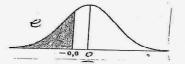






=área para c=1,94 menos área para c=0,81

e)
$$p(c \le -0.6) = 0.2742 \text{ ó } 27.4\%$$



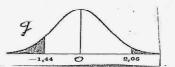
= 0,5 menos área para c=-0,6

f)
$$p(c \ge -1.28) = 0.8997 \text{ ó } 90\%$$



= 0,5 más área para c=-1,28

g)
$$p(c \le 1,44 \text{ y } c \ge 2,05) = 0,0951 \text{ ó } 9,5\%$$



= 1 -área para c=-1,44 y c=2,05

Ejemplo:

La duración media de una bombilla es de 12 meses, con una varianza de 4. El fabricante garantiza que dura más de 8 meses. Calcular

- 1) la probabilidad de que se funda en el periodo de garantía
- 2) la probabilidad de que dure al menos 16 meses
- 3) la probabilidad de que dure entre 15 y 18 meses

La variable "Vida de la bombilla" es una N(12, 2)

1) $p(x \le 8)$?

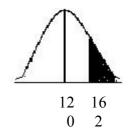
se dibuja la campana
se tipifica:
$$c = (8-12)/2 = -2$$

 $p(c \le -2) = 0.5 - p(-2 \le c \le 0) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 ó 2.28\%$

2)
$$p(x \ge 16)$$
 ?

$$c = (16-12)/2 = 2$$

 $p(c \ge 2) = 0.5 - p(0 \le c \le 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \text{ ó } 2.28\%$



3) $p(15 \le x \le 18)$?

$$c_1 = (15-12)/2 = 1,5$$

 $c_2 = (18-12)/2 = 3$

$$p(1,5 \le c \le 3) = p(0 \le c \le 3) - p(0 \le c \le 1,5)$$

= 0,4987 - 0,4332 = 0,0655 \(\delta \) 6,55\%

3)---calcular la frecuencia de un intervalo, conocidos N y la p del intervalo.

Es similar a lo visto en la DB: $N_r = N * p$. Aquí para simplificar llamaremos al intervalo i (en vez de $a \le x \le b$ ó $\in (a \div b)$) y a su frecuencia Ni.

Supongamos que en una muestra de 6500 individuos en los que se hecho el análisis A hemos calculado una p de 0,2426 para el intervalo entre 7 y 10 mg/dl. ¿Cuantos individuos tendrán ese análisis entre 7 y 10 mg/dl?

Solución: Ni = $6500 * 0,2426 = 1576,9 \approx 1577$

4)---Calcular un valor de c a partir de una p y de un punto de referencia en la campana (es decir, de otro valor de c)

Como en todos los problemas de campana <u>es imprescindible dibujarla</u> y situar en ella el punto c de referencia.

No olvidar que los de signo positivo se ponen a la derecha de la media (según vemos la campana) y los negativos a la izquierda.

Luego se busca en la tabla la p que nos dan y se ve a que valor de c corresponde. No olvidar el signo menos si le corresponde estar a la izquierda. Si el valor de p no está exactamente se toma el más próximo, siguiendo el mismo procedimiento que en el redondeo.

CALCULO DE UN VALOR C A PARTIR DE UNA PROBABILIDAD Y UN PUNTO DE REFERENCIA.

- 1) el área entre 0 y c es de 0.3770 ; p $\epsilon(0 \div c) = 0.3770$
 - dibujar campana



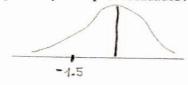
- buscar en la tabla. Vemos que le corresponde un c de 1.16 respuestas: hay dos c= 1.16 y c= -1.16
- 2) el área a la izquierda de c es 0.8621 ; $0.8621 = p \in (-\infty; c)$
 - dibujar la campana; al se p>0.5 c tiene que estar en el lado derecho



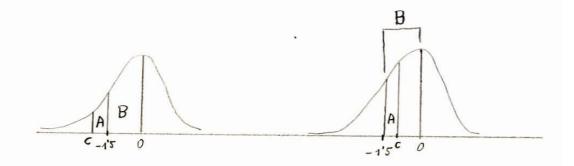
- como nuestra tabla es de sólo media campana restamos 0.5 p=0.3621 - buscamos en la tabla y encontramos una c de 1.09 respuesta: 1.09

3) el área entre -1.5 y c es de 0.0217 ; 0.0217 = p ϵ (-1.5 ÷ c)

- dibujar campana; c tiene que estar por fuerza a la izquierda ya que si fuera + el área valdría más de 0.4332 que es la p que corresponde a c=-1.5 pero hay dos posibilidades: a la derecha y a la izquierda de -1.5



-- p = A+B =
$$0.0217+0.4332 = 0.4549$$
 ; le corresponde c ≈ -1.69
-- p = B-A = $0.4332-0.0217 = 0.4115$; le corresponde c ≈ -1.35



5)---Calcular una puntuación original, x, a partir de puntuaciones estándar c

Se utiliza la fórmula $c = \frac{x - \overline{x}}{s}$; puede ser necesario dibujar la campana si hay alguna duda.

Ejemplos:

a)—Calcular la puntuación original que corresponde a una c = 1,6 en una N(6,2)

$$\rightarrow 1.6 = (x-6)/2$$
; $x = 9.2$

b)—En esa misma distribución calcular la puntuación original que deja por debajo de ella el 86.21% de los valores.

 \rightarrow 86,21% equivale a una p de 0,8621, por lo que x tiene que estar situado en el lado derecho de la campana. Para poder utilizar la tabla le restamos 0,5 a 0,8621 y queda 0,3621. Le corresponde una c = 1,09. Entonces 1,09 = (x-6)/2; x = 8,18

6)—Calcular $\bar{\mathbf{x}}$ y s a partir de otros parámetros.

Se utiliza la misma fórmula:
$$c = \frac{x - \overline{x}}{c}$$
.

De sus 4 elementos hay que conocer 3. Puede ser conveniente dibujar la campana.

Ejemplo: Calcular la s de un DN cuya media es 5 y en la que $p(x \le 6) = 0,6064$

 \rightarrow x tiene que esta en el lado derecho de la campana al ser la p > 0.5

$$0,6064 - 0.5 = 0,1064$$
 a quien corresponde una c de 0.27.

$$0.27 = (6-5)/s$$
 y s = 3.70

7)---aproximar una DB o una DP a una DN

Ambas se aproximan de forma perfecta a la DN cuando np ó $\lambda \to \infty$.

Las condiciones para la aproximación de la DN de una DB, recordemos, son p y $q \ge 0.1$ (ó 10%) y np y ng ≥ 5 (ó 500, si p se expresa como %).

La DB se transforma en una DN, que tenga la misma media y desviación estándar que la DB

La DP se aproxima de forma similar.

Hay que hacer una pequeña corrección, la llamada corrección de continuidad. La DB es discreta y por tanto discontinua y la DN es continua. No se toman los límites tabulados del intervalo sino el límite real que corresponda. Los límites tabulados deben quedar incluidos, por lo que en unos casos se tomará el límite real inferior y en otros el superior.

Así, si tiramos 300 monedas y queremos saber la p de obtener entre 90 y 120 caras, no calcularemos p($90 \le x \le 120$) sino p($89.5 \le x \le 120.5$).

Ejemplo: Esta misma tirada de las 300 monedas. Es una B(300, 0,5). $\overline{\mathbf{x}} = 300 * 0,5 = 150$ $\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{npq}} = 8,66$. Por tanto la transformamos en un N(150, 8,66), en la que hay que calcular p(89,5 \leq x \leq 120,5) por el procedimiento ya visto.(Es como el caso 2d, pero en el lado izquierdo de la campana. El resultado es 0,0003)

8)---Comprobar el ajuste de una distribución real (observada) a una DN.

Lo veremos con la distribución de la talla de sus compañeros del curso 1978/79.

$$N = 47$$
 $\bar{x} = 167.9 \text{ cm}$ $s = 7.8 \text{ cm}$

Talla de los alumnos de Bioestadística Curso 1978/79						
clases	p.m.	n°				
152-161 cm	156,5	10				
162-171 cm	166,5	23				
172-181 cm	176,5	12				
182-191 cm	186,5	2				

Hay que construir una DN teórica que tenga los mismos parámetros que la real. Una vez conocidas las frecuencias teóricas de cada clase se contrastan con las reales, mediante la prueba correspondiente. Si no hay diferencias significativas, el ajuste es bueno.

El procedimiento es un tanto engorroso y conviene seguir una metódica clara para no equivocarse. Como la que se usa aquí.

Pasos:

- 1) construirse una tabla auxiliar
- 2) comenzar a rellenarla por los Límites Reales

clases	L. reales	c	área	p	Ni	Ni
			entre c y 0	de la clase	teórico ≈	real
	- ∞	- ∞				
	151,5					
	161,5					
	171,5					
	181,5					
	191,5					
	$+\infty$	$+\infty$				

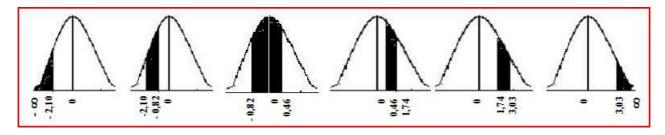
3) situar las clases

clases	L. reales	c	área	р	Ni	Ni
			Entre c y 0	de la clase	teórico ≈	real
	- ∞					
	151,5					
152-161						
	161,5					
162-171						
	171,5					
172-181						
	181,5					
182-191						
	191,5					
	$+\infty$					

4) Calcular valores de c para cada L. real y el área entre c y 0

clases	L. reales	c	área	p	Ni	Ni
			entre c y 0	de la clase	teórico	real
	- 8	8	0,5			
	151,5	-2,10	0,4821			
152-161						
	161,5	-0,82	0,2939			
162-171						
	171,5	0,46	0,1772			
172-181						
	181,5	1,74	0,4591			
182-191						
	191,5	3,03	0,4988			
	$+\infty$	$+\infty$	0,5			

5) calcular la p de cada clase (dibujar campana), pasarla a la tabla auxiliar y calcular Nr teórico



clases	L. reales	c	Área (p)	р	Ni	Ni
			entre c y 0	de la clase	teórico ≈	real
	- ∞	- ∞	0,5			
				0,0179	0,9	
	151,5	-2,10	0,4821			
152-161				0,1882	9	10
	161,5	-0,82	0,2939			
162-171				0,4711	22	23
	171,5	0,46	0,1772			
172-181				0,2819	13	12
	181,5	1,74	0,4591			
182-191				0,0397	2	2
	191,5	3,03	0,4988			
				0,0012	0,1	
	$+\infty$	$+\infty$	0,5			

6) aplicar prueba de contraste de frecuencias (fórmula nº 3; tema 16). Se obtiene Z=1,233, que es $< \chi 2$ (5, 0'05)=11,07, n.s. Se concluye que el ajuste es bueno, como parece va a simple vista.

Distribución de la t de Student

es la distribución teórica de las muestras pequeñas de una población que sigue la ley normal con datos cuantitativos continuos.

Gosset (que utilizaba el seudónimo de Student) comprobó que cuando disminuía el tamaño de las muestras, no valían del todo los normas de la DN, tanto más cuanto más pequeña sea la muestra. Hasta N=30 las diferencias son bastante acusadas. Por eso la mayoría de autores ponen a ese nivel la frontera de uso práctico entre DN y t de Student.. Otros lo ponen en 60 y algunos hasta en 120. Los programas estadísticos utilizan casi exclusivamente la t de Student para todas las variables continuas, ya que hasta el infinito no se produce una identidad plena entre ambas distribuciones. La DN está en vías de extinción, al menos en la práctica. Nosotros seguiremos el criterio de utilizar la t de Student para muestras pequeñas (N<30) y la DN para las grandes.

La **notación** es $t(gl, \alpha)$. α es el nivel de significación elegido y gl es el grado de libertad. Con este nombre se designa al número de observaciones independientes, que en general son N-1. Un ejemplo ayudará a entender este concepto. Si nos piden 5 valores que sumen 35, sólo podremos elegir libremente 4, pues el 5° es obligado: supongamos que elegimos 8 , 10 , 23 , -15 . El 5° número tiene que ser por fuerza 9 ; hay 4 grados de libertad.

Aquí no hay modelo tipificado y para cada valor de N hay una campana distinta (que no es preciso dibujar..).

La **tabla** sigue el modelo de las tablas de doble entrada. En la primera columna está el grado de libertad y en la primera fila hay tres niveles de significación.

$$t(5, 0.05) = 2.571$$
; $t(26, 0.001) = 3.707$; $t(15, 0.01) = 2.947$

El término t se usa para designar varias cosas, lo que puede generar cierta confusión:

- 1—la distribución de la t de Student
- 2---los valores de la abscisa de la campana correspondiente, donde están los valores de referencia para valorar el resultado de las pruebas. Es el equivalente a la c de la DN
- 3---el resultado de las pruebas estadísticas que son valoradas por la t de Student. Esto lo obviamos llamando de una forma genérica **Z** a todos los resultados de las pruebas estadísticas, nombre arbitrario que puede ser sustituido por cualquier otro.

Distribución χ^2 (chi o ji cuadrado) es la distribución que siguen las frecuencias de muestras obtenidas de una población.

También aquí hay grados de libertad y para cada grado de libertad hay un gráfico distinto.

Notación: χ^2 (gl, α)

La **tabla** es también de doble entrada, con una disposición similar, aunque nos ofrece un nivel de significación más, el de 0,02.

$$\chi^2(1, 0.05) = 3.84$$
; $\chi^2(2, 0.01) = 9.21$; $\chi^2(5, 0.001) = 20.52$

Su uso es típico de las tablas de 2 por 2 (2x2) ó f por k (fxk), siendo f el nº de filas y k el de co-

Con el nombre de χ^2 se pueden designar también dos cosas: 1---la distribución χ^2

2---los resultados de las pruebas que son valoradas por la χ^2 (lo que no seguimos aquí, pues a todos los resultados los llamamos Z, con independencia de cómo sean valorados).

Distribución de la F de Snedecor-Fisher

es la distribución de los posibles cocientes de dos varianzas, poniendo siempre la mayor de ellas en el numerador. Así F será siempre ≥ 1, lo que supone un ahorro de espacio al confeccionar la tabla. Aquí también hay grados de libertad y gráficos distintos para cada grado de libertad (que no tenemos que dibujar).

Notación : $F(gl1, gl2, \alpha)$. Siendo gl1 = k-1 (k es el nº de muestras o grupos) y gl2 = (N-1)(k-1). N es la frecuencia total, el tamaño total de todas las muestras o grupos.

Tablas: para cada nivel de significación hay una tabla distinta, que también es de doble entrada. Se busca gl1 en la primera fila y gl2 en la primera columna.

$$F(5, 9, 0,05) = 3,48$$
; $F(12, 10, 0,01) = 4,71$

Cuando la tabla no nos ofrece el valor exacto del gl, se aproxima al más cercano o si se es muy riguroso, siempre al inferior. Para F(90, 30, 0,001) lo habitual es elegir 2,76, pero en función del rigor de la investigación se puede elegir también.2,92

Se usa para valorar la llamada "igualdad de varianzas" y los resultados de las pruebas de ANOVA.

Con F se pueden designar también dos cosas:

1---la distribución F

2---los resultados de las pruebas que son valoradas por la F (lo que no seguimos aquí, pues a todos los resultados los llamamos Z, con independencia de cómo sean valorados).

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA

Variante de Binomial cuando no hay reposición de efectivos y N es finita. Si N es muy grande, vale la Binomial.(La aproximación es ya buena, si $N_1/N \le 0,1$ ó mejor si $\le 0,05$). O sea, siempre que el tamaño de la muestra sea el 10% o menos del tamaño de la población, se puede usar -y de hecho se usa- la DB.

<u>Notación</u>: $H(n, N, N_1)$, siendo n como en la DB, N el nº total de individuos y N_1 los que presentan la característica. Se busca la p de r (que va de 0 a n, como en la DB).

$$\underline{F\acute{o}rmula:} \ p(r) = \frac{\binom{N1}{r}\binom{N-N1}{n-r}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{N1!}{r!(N1-r)!} * \frac{(N-N1)!}{(n-r)!(N-N1-n+r)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

ó simplificando:
$$p(r) = \frac{N1!(N-N1)!n!((N-n)!}{r!(N1-r)!(n-r)!(N-N1-n+r)!N!}$$

La varianza es menor que en la DB:
$$s^2 = npq \frac{N-n}{N-1}$$

Al intervenir tantas factoriales en la fórmula, las calculadoras e incluso muchos programas estadísticos de ordenador se ven sobrepasados fácilmente en su capacidad de cálculo. La hoja de cálculo Excel admite hasta N = 170, mientras otros programas más antiguos, basados en MS-Dos, no pasan de 33. Lo vemos aquí para completar el tema, ya que por este motivo no puede ser objeto de examen. En la práctica es habitual hacer los cálculos como si fuera una DB, ya que el error es en general muy pequeño.

<u>Ejemplo 1</u>: De 100 enfermos, 20 presentan una infección. Se toman 5 al azar y se pide la probabilidad de que sólo 1 presente la infección.

N=100; N₁=20; n=5; r=1 Es H(5, 100, 20)

Haciendo las operaciones sale p(r=1) = 0,420144...

Como binomial sería B(5, 0.2) y p(r=1)=0,4096

Ejemplo 2:

p de que sacando 4 cartas de una baraja española de 40 cartas, las 4 sean ases. Es H(4, 40, 4) y $p(r=4) = 1,0942*10^{-5}$

Como B(
$$4, 4/40$$
) = B($4, 0.1$), p(r= 4) = 0,0001

Por cálculo elemental (que es exacto) : $4/40 * 3/39 * 2/38 * 1/37 = 24/2193369 = 1,0942*10^{-5}$

Por Poisson, P(0,4): p(r=4) = 0.0007

Distribución Binomial B(n, p)

$$\bar{X} = np \quad s = \sqrt{npq} \quad N = \sum N_r \quad N_r = Np(r)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum (rN_r)}{N} \quad p(r) = \frac{n!}{r!*(n-r)!} p^r q^{(n-r)}$$

n	r					р				
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6 7	0,0000 0,0000	0,0001 0,0000	0,0004 0,0000	0,0013 0,0001	0,0036 0,0002	0,0084 0,0006	0,0172 0,0016	0,0320 0,0037	0,0547 0,0078
•	•	0.4005	0.0705	0.1070	0.1001	0.0570	0.0010	0.0100	0.0004	0.0000
8	0 1	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319 0,1373	0,0168	0,0084	0,0039 0,0313
	2	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670 0,3115	0,1977 0,2965		0,0896	0,0548 0,1569	0,0313
	3	0,1488 0,0331	0,2376 0,0839	0,2936 0,1468	0,3115	0,2965	0,2587 0,2786	0,2090 0,2787	0,1569	0,1094
	4	0,0331	0,0639	0,1466	0,2076	0,2341	0,2786	0,2767	0,2627	0,2186
	5	0,0040	0,0103	0,0439	0,0003	0,1361	0,1873	0,2322	0,2027	0,2188
	6	0,000	0,0020	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

Distribución de Poisson P(λ)

$$p(r) = \frac{\lambda^{r}}{r!} e^{-\lambda}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \lambda = \mathbf{np}$$
 ; $\bar{\mathbf{X}} = \frac{\sum (\mathbf{r} * \mathbf{N}_{\mathbf{r}})}{\mathbf{N}}$; $\mathbf{s}^2 = \lambda$; $\mathbf{s} = \sqrt{\lambda}$

Valores de e^{-\lambda}

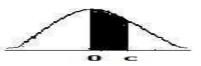
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9321	0,9139
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0.3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6636	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0.5886	0,5827	0,5770	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0.6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0.7	0,4966	0,4916	0,4868	0.4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0.8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045

Para obtener otros valores de $e^{-\lambda}$ recordar las normas del producto de potencias y manejar adecuadamente los exponentes.

Así:
$$e^{-1,25} = e^{-1} * e^{-0,25} = 0,36788*0,7788 = 0,2865$$

Distribución normal N (0, 1)

$$c = \frac{x - \overline{x}}{s}$$



 $c = \frac{x - \overline{x}}{s}$ la tabla da la probabilidad de que un valor cualquiera esté entre c = 0 y otro valor de c

a esta c se la llama hoy día mayoritariamente z

c_	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tabla de χ2

Probabilidad

g.	0,05	0,02	0,01	0,001
1.				
1	3,84	5,41	6,64	10,83
2	5,99	7,82	9,21	13,82
3	7,81	9,84	11,34	16,27
4	9,49	11,77	13,28	18,47
5	11,07	13,39	15,09	20,52
6	12,59	15,03	16,81	22,46
7	14,07	16,62	18,48	24,32
8	15,51	18,17	20,09	26,13
9	16,92	19,68	21,67	27,88
10	18,31	21,16	23,21	29,59

Tabla de la t de Student

g. l.	0,05	0,01	0,001	g. l.	0,05	0,01	0,001
1	12,71	63,66	636,6	26	2,056	2,779	3,707
2	4,303	9,925	31,60	27	2,052	2,771	3,690
3	3,182	5,841	12,94	28	2,048	2,763	3,674
4	2,776	4,604	8,610	29	2,045	2,756	3,659
5	2,571	4,032	6,859	30	2,042	2,750	3,646
6	2,447	3,707	5,959	35	2,030	2,724	3,592
7	2,365	3,499	5,405	40	2,021	2,704	3,551
8	2,306	3,355	5,041	45	2,014	2,689	3,521
9	2,262	3,250	4,781	50	2,008	2,678	3,496
10	2,228	3,169	4,587	55	2,004	2,669	3,476
11	2,201	3,106	4,437	60	2,000	2,660	3,460
12	2,179	3,055	4,318	70	1,994	2,648	3,435
13	2,160	3,012	4,221	80	1,989	2,638	3,416
14	2,145	2,977	4,140	90	1,986	2,631	3,402
15	2,131	2,947	4,073	100	1,982	2,626	3,390
16	2,120	2,921	4,015	120	1,980	2,617	3,373
17	2,110	2,898	3,965	130	1,977	2,612	3,361
18	2,101	2,878	3,922	140	1,975	2,607	3,352
19	2,093	2,861	3,883	150	1,974	2,605	3,349
20	2,086	2,845	3,850	160	1,973	2,603	3,346
21	2,080	2,831	3,819	200	1,972	2,601	3,340
22	2,074	2,819	3,792	300	1,968	2,592	3,340
23	2,069	2,807	3,767	400	1,966	2,588	3,315
24	2,064	2,797	3,745	500	1,965	2,586	3,310
25	2,060	2,787	3,725	∞	1,960	2,576	3,291

F de Snedecor-Fisher $\alpha = 0.05$

Γ	1							Ī																		ĺ								
	8	4,36	3,67	3,23	2,93	2,71	2,54	2,40	2,30	2,21	2,13	2,07	2,01	1,96	1,92	1,88	1,84	1,81	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	1,64	1,62	1,51	1,44	1,34	1,29	1.19	1,08	~
	200	4,37	3,68	3,24	2,94	2,72	2,55	2,42	2,31	2,22	2,14	2,08	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,83	1,80	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	1,64	1,53	1,46	1,36	1,31	1,22	1,13	1,1
5	100	4,41	3,71	3,27	2,97	2,76	2,59	2,46	2,35	2,26	2,19	2,12	2,07	2,02	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,82	1,80	1,78	1,76	1,74	1,73	1,71	1,70	1,59	1,52	1,44	1,39	1,32	1,26	1,24
į	20	4,44	3,75	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,40	2,31	2,24	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,84	1,82	1,81	1,79	1,77	1,76	1,66	1,60	1,52	1,48	1,41	1,36	1,35
9	40	4,46	3,77	3,34	3,04	2,83	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20	2,15	2,10	2,06	2,03	1,99	1,96	1,94	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,82	1,81	1,79	1,69	1,63	1,55	1,52	1,46	1,41	1,40
į	35	4,48	3,79	3,36	3,06	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	2,17	2,12	2,08	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,91	1,89	1,87	1,86	1,84	1,83	1,81	1,72	1,66	1,58	1,54	1,48	1,43	1,42
ç	30	4,50	3,81	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,94	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,84	1,74	1,69	1,61	1,57	1,52	1,47	1,46
ı		7	3,83	3,40	3,11	2,89			2,50		2,34	2,28	2,23	2,18			2,07	2,05					1,94								1,62		1,52	1,51
	20	4,56	3,87	3,44	3,15	2,94					2,39				2,19	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,84	1,78	1,71	1,68	1,62	1,58	1,57
Į,		4,62	3,94	3,51			2,85			2,53						2,23			2,15				2,07	2,06	2,04	2,03	2,01	1,92	1,87	1,80	1,77	1,72	1,68	1,67
,	14	4,64	3,96								2,48							2,20											1,89	1,83	1,79	1,74	1,70	1,69
ç	13	4,66	3,98	3,55	3,26	3,05	2,89	2,76	2,66	2,58	2,51	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,15	2,14	2,12	2,10	2,09	2,08	2,06	1,97	1,92	1,85	1,82	1,77	1,73	1,72
ç	12	4,68		3,57			2,91	2,79	2,69		2,53	2,48	2,42			2,31						2,16	2,15	2,13			2,09		1,95	1,88	1,85	1,80	1,76	1,75
*	П	4,70	4,03	3,60	3,31	3,10	2,94	2,82				2,51	2,46	2,41								2,20	2,18	2,17		2,14	2,13			1,92		1,84	1,80	1,79
Ç	10	4,74																					2,22			2,18	2,16	2,08	2,03	1,96	1,93	1,88	1,84	1,83
	6	4,77	4,10	3,68	3,39	3,18					2,65					2,42			2,34			2,28	2,27					2,12			1,97	1,93	1,89	1,88
c	×	4,82	4,15		3,44		3,07		2,85			2,64								2,37			2,32				2,27			2,06	2,03	1,98	1,95	1,94
t	7	4,88	4,21	3,79	3,50	3,29		3,01			2,76			2,61		2,54			2,46			2,40	2,39					2,25				2,06	2,02	2,01
	9			3,87					3,00														2,47										2,11	2,10
	S.	2,05		3,97		3,48						2,90				2,74				2,64										2,34				
↑ -	4	5,19	က		4	3,63	3,48				3,11					2,90				2,80		2,76	2,74	2,73			2,69 ;		2,56		2,46	2,42	~	2,37
	3		4,76		4,07				3,49			3,29							3,05												2,70		2,61	2,60
مه - ا	7			<u>'</u>			10	11	12		14	15 3			18								76					40 3			100		9	8
-	àa																				- '					. 1	•					-	<u> </u>	

F de Snedecor-Fisher $\alpha = 0.01$

	1				ĺ		ĺ					ĺ					Ī					1									1		
8	9,02	6,88	5,65	4,86	4,31	3,91	3,60	3,36	3,17	3,00	2,87	2,75	2,65	2,57	2,49	2,42	2,36	2,31	2,26	2,21	2,17	2,13	2,10	2,08	2,03	2,01	1,80	1,68	1,52	1,43	1,29	1,1	_
200	9,04	6,90	2,67	4,88	4,33	3,93	3,62	3,38	3,19	3,03	2,89	2,78	2,68	2,59	2,51	2,44	2,38	2,33	2,28	2,24	2,19	2,16	2,12	2,09	2,06	2,03	1,83	1,71	1,55	1,47	1,33	1,19	1,15
100	9,13	6,99	5,75	4,96	4,41	4,01	3,71	3,47	3,27	3,11	2,98	2,86	2,76	2,68	2,60	2,54	2,48	2,42	2,37	2,33	2,29	2,25	2,22	2,19	2,16	2,13	1,94	1,82	1,67	1,60	1,48	1,38	1,36
20	9,24	7,09	5,86	5,07	4,52	4,12	3,81	3,57	3,38	3,22	3,08	2,97	2,87	2,78	2,71	2,64	2,58	2,53	2,48	2,44	2,40	2,36	2,33	2,30	2,27	2,25	2,06	1,95	1,81	1,74	1,63	1,54	1,52
40	9,29	7,14	5,91	5,12	4,57	4,17	3,86	3,62	3,43	3,27	3,13	3,02	2,92	2,84	2,76	2,69	2,64	2,58	2,54	2,49	2,45	2,42	2,38	2,35	2,33	2,30	2,11	2,01	1,87	1,80	1,69	1,61	1,59
35	9,33	7,18	5,94	5,15	4,60	4,20	3,89	3,65	3,46	3,30	3,17	3,05	2,96	2,87	2,80	2,73	2,67	2,62	2,57	2,53	2,49	2,45	2,42	2,39	2,36	2,34	2,15	2,05	1,91	1,84	1,74	1,66	1,64
30	9,38	7,23	5,99	5,20	4,65	4,25	3,94	3,70	3,51	3,35	3,21	3,10	3,00	2,92	2,84	2,78	2,72	2,67	2,62	2,58	2,54	2,50	2,47	2,44	2,41	2,39	2,20	2,10	1,96	1,89	1,79	1,72	1,70
25	9,45	7,30	90'9	5,26	4,71	4,31	4,01	3,76	3,57	3,41	3,28	3,16	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,73	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	2,51	2,48	2,45	2,27	2,17	2,03	1,97	1,87	1,79	1,77
20	9,55	7,40	6,16	5,36	4,81	4,41	4,10	3,86	3,66	3,51	3,37	3,26	3,16	3,08	3,00	2,94	2,88	2,83	2,78	2,74	2,70	2,66	2,63	2,60	2,57	2,55	2,37	2,27	2,13	2,07	1,97	1,90	1,88
15	9,72	7,56	6,31	5,52	4,96	4,56	4,25	4,01	3,82	3,66	3,52	3,41	3,31	3,23	3,15	3,09	3,03	2,98	2,93	2,89	2,85	2,81	2,78	2,75	2,73	2,70	2,52	2,42	2,29	2,22	2,13	2,06	2,04
14	9,77	7,60	6,36	5,56	5,01	4,60	4,29	4,05	3,86	3,70	3,56	3,45	3,35	3,27	3,19	3,13	3,07	3,02	2,97	2,93	2,89	2,86	2,82	2,79	2,77	2,74	2,56	2,46	2,33	2,27	2,17	2,10	2,08
13	9,82	7,66	6,41	5,61	5,05	4,65	4,34	4,10	3,91	3,75	3,61	3,50	3,40	3,32	3,24	3,18	3,12								2,81								
12	68'6	7,72	6,47	5,67	5,11	4,71	4,40	4,16	3,96	3,80	3,67	3,55	3,46	3,37	3,30	3,23	3,17	3,12	3,07	3,03	2,99	2,96	2,93	2,90	2,87	2,84	2,66	2,56	2,43	2,37	2,27	2,20	2,18
11	96'6	7,79	6,54	5,73	5,18	4,77	4,46	4,22	4,02	3,86	3,73	3,62	3,52	3,43	3,36	3,29	3,24	3,18	3,14	3,09	3,06	3,02	2,99	2,96	2,93	2,91	2,73	2,63	2,49	2,43	2,34	2,27	2,25
10	10,05	7,87	6,62	5,81	5,26		4,54	4,30	4,10	3,94	3,80	3,69	3,59	3,51	3,43	3,37	3,31	3,26	3,21	3,17	3,13	3,09	3,06	3,03	3,00	2,98	2,80	2,70	2,57	2,50	2,41	2,34	2,32
6	10,16	7,98	6,72	5,91	5,35	4,94	4,63	4,39	4,19	4,03	3,89	3,78	3,68	3,60	3,52	3,46	3,40	3,35	3,30	3,26	3,22	3,18	3,15	3,12	3,09	3,07	2,89	2,78	2,65	2,59	2,50	2,43	2,41
8	10,29	8,10	6,84	6,03	5,47	90'9	4,74	4,50	4,30	4,14	4,00	3,89	3,79	3,71	3,63	3,56	3,51	3,45	3,41	3,36	3,32	3,29	3,26	3,23	3,20	3,17	2,99	2,89	2,76	2,69	2,60	2,53	2,51
7	10,46 1	8,26	66,9	6,18	5,61	5,20	4,89	4,64	4,44	4,28	4,14	4,03	3,93	3,84	3,77	3,70	3,64	3,59	3,54	3,50	3,46	3,42	3,39	3,36	3,33	3,30	3,12	3,02	2,89	2,82	2,73	5,66	2,64
9	0,67 1	3,47			5,80					4,46					3,94							3,59						3,19			2,89		
2	0,97 10	3,75	7,46		6,06		5,32					4,44			4,17			3,99				3,82				3,70			3,27	3,21	3,11	3,04	
	1,39 10	9,15 8		7,01 6	6,42 6	_				5,04 4		4,77 4					4,37 4					4,14 3	4,11 3	4,07	4,04 3		3,83		3,58 3	3,51 3		3,34 3	
4	~																																
3	12,06	. ·	8,	7,4	6,6	6,	6,5	5,6	.,.	5,4	2,4	5,7	Ω,	5,(5,(4,5	4,8	4,	4	4	4,(4,(4,6	4,4	4,54	4,	4,	4,20	4,05	3,98	3,8	3,80	"
g.1. 2 \(\)	S	9	7	∞	6	10	111	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	5 6	27	58	29	30	40	20	75	100	200	1000	8

F de Snedecor-Fisher $\alpha = 0,001$

	ı,	ര	Ŋ	0					•		_							_					١		_	_								
8	3	23,7	15,7	11,7	9,33	7,81	6,76	90,0	5,45	4,97	4,60	4,31	4,06	3,85	3,67	3,51	3,38	3,26	3,15	3,05	2,97	2,89	2,82	2,75	2,69	2,64	2,59	2,23	2,03	1,75	1,62	1,39	1,15	_
200																										2,68								
100		24,1	16,0	12,0	9,0	8,04	6,98	6,21	5,63	5,17	4,81	4,51	4,26	4,05	3,87	3,71	3,58	3,46	3,35	3,25	3,17	3,09	3,02	2,96	2,90	2,84	2,79	2,44	2,25	1,99	1,87	1,68	1,53	1,49
9		24,4	16,3	12,2	9,8	8,26	7,19	6,42	5,83	5,37	5,00	4,70	4,45	4,24	4,06	3,90	3,77	3,64	3,54	3,44	3,36	3,28	3,21	3,14	3,09	3,03	2,98	2,64	2,44	2,19	2,08	1,90	1,77	1,73
40	2	24,6	16,4	12,3	6,6	8,37	7,30	6,52	5,93	5,47	5,10	4,80	4,54	4,33	4,15	3,99	3,86	3,74	3,63	3,53	3,45	3,37	3,30	3,23	3,18	3,12	3,07	2,73	2,53	2,29	2,17	2,00	1,87	1,84
35	S	24,7	16,5	12,4	10,0	8,45	7,37	6,59	6,00	5,54	5,17	4,86	4,61	4,40	4,22	4,06	3,92	3,80	3,69	3,60	3,51	3,43	3,36	3,30	3,24	3,18	3,13	2,79	2,60	2,35	2,24	2,07	1,94	1,90
30	90	24,9	16,7	12,5	10,1	8,55	7,47	6,68	6,09	5,63	5,25	4,95	4,70	4,48	4,30	4,14	4,00	3,88	3,78	3,68	3,59	3,52	3,44	3,38	3,32	3,27	3,22	2,87	2,68	2,44	2,32	2,15	2,02	1,99
75	C7	25,1	16,9	12,7	10,3	8,69	7,60	6,81	6,22	5,75	5,38	2,07	4,82	4,60	4,42	4,26	4,12	4,00	3,89	3,79	3,71	3,63	3,56	3,49	3,43	3,38	3,33	2,98	2,79	2,55	2,43	2,26	2,14	2,10
00	07	25,4	17,1	12,9	10,5	8,90	7,80	7,01	6,40	5,93	5,56	5,25	4,99	4,78	4,59	4,43	4,29	4,17	4,06	3,96	3,87	3,79	3,72	3,66	3,60	3,54	3,49	3,15	2,95	2,71	2,59	2,42	2,30	2,27
7	CI	25,9																								3,80							2,54	2,51
14	<u>.</u>	26,1	17,7	13,4	10,9	9,33	8,22	7,41	6,79	6,31	5,93	5,62	5,35	5,13	4,94	4,78	4,64	4,51	4,40	4,30	4,21	4,13	4,06	3,99	3,93	3,88	3,82	3,47	3,27	3,03	2,91	2,74	2,61	2,58
7																										3,96							2,69	2,66
12	71	26,4	18,0	13,7	11,2	9,57	8,45	7,63	7,00	6,52	6,13	5,81	5,55	5,32	5,13	4,97	4,82	4,70	4,58	4,48	4,39	4,31	4,24	4,17	4,11	4,05	4,00	3,64	3,44	3,19	3,07	2,90	2,77	2,74
1	11	26,6	18,2	13,9	11,4	9,72	8,59	7,76	7,14	6,65	6,26	5,94	2,67	5,44	5,25	5,08	4,94	4,81	4,70	4,60	4,51	4,42	4,35	4,28	4,22	4,16	4,11	3,75	3,55	3,30	3,18	3,00	2,87	2,84
2		56,9	18,4			6,89					6,40												4,48			4,29					3,30			2,96
0	\	27,2	. 2,8																							4,45							3,13	3,10
×	ָ ֓֞֞֞֞֜֞֞֜֜֞֜֞֜֞֜֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֡֓֜֜֝֓֓֓֡֓֜֡֓֜֡֓֜֡֓֓֡֓֜֡֓֡֓֡֓	, 9,7) 0,6			_																				4,64							300,	,27
	ľ	3,2				$\overline{}$																				4,87 4								
1						13 10,																										l		_
9				,2 15,5		1 11,					2 7,44				1 6,35					8 5,65						9 5,18			0 4,51		8 4,11		4 3,78	
V	9	29,8	20,	16,2		11,7	~																			5,59						4,29		
	+	31,1	21,9	17,2	14,4	12,56	11,28	10,35	9,63	9,07	8,62	8,25	7,94	7,68	7,46	7,27	7,10	6,95	6,81	6,70	6,59	6,49	6,41	6,33	6,25	6,19	6,12	5,70	5,46	5,16	5,02	4,81	4,65	4,62
g.l. 1		33,2	23,7	18,8	15,8	13,90	12,55	11,56	10,80	10,21	9,73	9,34	9,01	8,73	8,49	8,28	8,10	7,94	7,80	7,67	7,55	7,45	7,36	7,27	7,19	7,12	7,05	6,59	6,34	6,01	5,86	5,63	5,46	5,42
- C	1.	n,	9	<u></u>	∞	6	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	76	27	28	59	30	40	20	75	100	200	0001	8