Tema 9 : Teoría de la probabilidad

Definición

Veremos dos:

---La **definición clásica de Laplace** dice que la probabilidad, (p), de ocurrencia de un fenómeno A (o evento, suceso, modalidad de una variable...) en un experimento aleatorio de resultados equiprobables es igual al nº de casos favorables, también llamados éxitos, (símbolo: f ó r) dividido por el nº de casos posibles (N).

$$\boxed{pA = f/N}$$

Como f puede estar entre 0 y N, los valores posibles de p van de 0 a 1. Suelen expresarse, salvo el 0 y el 1, con 3 ó 4 decimales. También se puede expresar como porcentaje, entre 0% y 100%. A veces es conveniente, por ser más manejable, expresarlo como fracción.

Tres aclaraciones a esta definición

1-Un *experimento aleatorio*

- -no tiene resultado fijo, sino un conjunto de posibles resultados (2 ó más)
- -el resultado no se conoce de antemano, ocurre de forma aparentemente casual.
- -se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones.

2- *Equiprobable* quiere decir que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir

Ejemplo: la probabilidad de que al tirar un lado salga un 3 es 1/6 .(1/6 es preferible a 0,1667).

El modelo de Laplace es un modelo teórico, intuitivo, en el que por simple reflexión se pueden saber las probabilidades.

3- *Éxito* se utiliza cuando ocurre el evento. El término es un clásico y se introdujo estudiando tiradas de dados, aplicándose aunque el evento sea algo negativo. Si se estudia la mortalidad, un fallecimiento será un "éxito"...

---La **definición de Richard von Misses** es más amplia y universal, basada en un modelo experimental, práctico: "La mejor estimación de la probabilidad de la ocurrencia de un fenómeno en un experimento aleatorio es su frecuencia relativa".

Ejemplo:. Teóricamente al lanzar una moneda bien hecha la p de cara es de 0,5. Hacemos un experimento tirando la moneda repetidamente. Vamos anotando como éxito las caras que van saliendo y después de cada tirada se calcula la f.r. de éxitos. Tras variaciones de cierta amplitud al principio pronto la f.r. se mueve cada vez más cerca de 0,5, con el que coincidirá exactamente en el infinito.

De esta forma calculando la f.r. podemos hallar la probabilidad de sucesos en los que no podemos utilizar la intuición. Por ejemplo, tirando varios cientos de chinchetas del modelo X al suelo, la f.r. de las que queden con la punta hacia arriba nos dará la p de tal resultado en ese modelo.

No tiene valor estadístico la llamada probabilidad subjetiva, que es una mezcla del conocimiento de los factores que pueden influir en un resultado con factores emocionales. Como la p de que nuestro equipo favorito gane el próximo partido o de aprobar una asignatura a la primera..

Sucesos elementales y complejos

Suceso elemental es el suceso básico, como p .e. nacer chica, cuya p es de 0,5

El suceso complejo comprende varios elementales, como p.e. tirar dos dados o el nº de chicas en una familia de 5 hijos. En algunos casos es fácil calcular sus probabilidades de ocurrencia con las reglas que se ven a continuación, pero en la mayoría hay que recurrir a las distribuciones fundamentales de probabilidad, que se verán en el tema 10

Algunos conceptos básicos de la probabilidad

1- $0 \leq p \leq 1$ ó $0\% \leq p \leq 100\%$

2- $\Sigma p(A_x) = 1$, siendo A_x el dominio de la variable, o sea todas sus modalidades o valores

3- Si A es el suceso elemental con probabilidad pA, la probabilidad de que no ocurra A, es decir, de que ocurra el suceso contrario o complementario ($\bar{A}$) es 1-p ó q .

Por tanto $p\bar{A} = 1-p = q$; $qA = 1 - q$

Un suceso elemental y su complementario son mutuamente excluyentes, incompatibles, no pueden ocurrir simultáneamente. Un suceso complementario puede ser simple o múltiple. Simple o sencillo, cuando sólo tiene una modalidad (caso de una moneda). Múltiple o compuesto, cuando engloba varias modalidades (caso de un dado).

4- $p + q = 1$ ó $p + q = 100\%$

5- Son sucesos independientes aquellos cuya ocurrencia no depende de otro u otros sucesos. Por ejemplo, que al tirar dos dados en una salga 4 y en el otro 2.

Son sucesos dependientes aquellos cuya ocurrencia depende de otro u otros sucesos. Si sacamos dos cartas de una baraja española, la p de que la segunda sea oros depende del palo de la primera carta. se formula así: p (A2/A1) , "p de A2 dado A1".

6- Ley multiplicativa. Rige la p de que ocurran a la vez dos o más sucesos (que por fuerza tienen que ser compatibles).

a. si son independientes: p(A1 y A2) = pA1 * pA2
b. si son dependientes: p(A1 y A2) = pA1 * p(A2/A1)

7- Ley aditiva. Rige la p de que ocurra un suceso u otro.

a. si son incompatibles. p(A1 o A2) = pA1 + pA2
b. si son compatibles: p(A1 o A2) = pA1 + pA2 – pA1*pA2

ya que hay que restar la compatibilidad.

<u>Ejemplos</u>

a) p de que al tirar un dado dos veces salgan en ambas un 6.

"seis en la 1ª tirada **y** 6 en la 2ª"

p(2 veces 6) = 1/6 * 1/6 = 1/36 (mejor que 0,0278)

b) p de que al tirar dos dados salga en ambos un 6

"seis en el primer dado **y** seis en el segundo"

es el mismo caso que a)

c) La p de ser rubio es de 0,3 y la de llevar gafas es de 0,2 . Calcular la p de que una persona cualquiera sea rubia y lleve gafas (se asume que son independientes)

p(rubio **y** gafas) = 0,3 * 0,2 = 0,06 (ó 6%)

d) en una caja hay 3 bolas blancas y 2 negras. Calcular la p de que sacando dos bolas, las dos sean negras.

Nos piden la p de que sea negra la primera **y** negra la segunda.

la p de ser negra de la 1ª bola es 2/5 ; una vez sacada quedan 4 bolas (una, negra)

la p de ser negra de la 2ª bola es de ¼

p(2 bolas negras) = 2/5 * ¼ = 2/20 = 1/10 (ó 0,1 ó 10%)

e) p de que al sacar una carta de una baraja española de 40 cartas sea oros o copas.

p(oros **o** copas) = 10/40 + 10/40 = 20/40 = ½ (ó 0,5 ó 50%)

f) p de que al sacar una carta de esa baraja sea as o espadas.

hay 4 ases , 10 espadas y 1 as de espadas (que cuenta como as y como espada, 1 entre 40, que debe ser compensada)

p(As **o** Espada) = 4/40 + 10/40 – 1/40 = 13/40 = 0,325

g) p de acertar 6 en la Primitiva

Hay 49 bolas. Como no hay reemplazo, cada vez que sale una bola, queda una menos en el bombo. Para acertar los 6 resultados hay que acertar el primer número y el segundo y el tercero...y el sexto.

p(6 aciertos) = 6/49 * 5/48 * 4/47 * 3/46 * 2/45 *1/44 = 1 /13.983.816

h) p de que tirando un dado 4 veces, la primera vez que salga un 5 sea en la 4ª tirada.

p(5 sólo en la 4ª) = p(no 5 en la 1ª)*p(no 5 en la 2ª)*p(no 5 en la 3ª)*p(5 en la4ª) = 5/6 * 5/6 * 5/6 * 1/6 = 125/1296 = 0,096

a) p de al menos un éxito (es decir, uno o más, uno como mínimo) en n intentos

se resuelve así : $p(r\geq1) = 1 - p(r=0)^n$ ¡Ojo! no es $1 - p(r=0)*n$

Ejemplo: Un problema importante en la prevención del tétanos cuando no había vacunas o gammaglobulinas y había que administrar suero antitetánico eran las reacciones, a veces muy graves, que ocurrían en un 10% de los inyectados.

En una persona que hubiera recibido 10 inyecciones ¿cual es la p de que al menos tuviera una reacción?

Si la p de tener una reacción es de 0,1, la de no tenerla es de 0,9. Por tanto $p(r\geq1) = 1 - 0{,}9^{10} = 0{,}651$. Si, falsamente, se hubiera calculado $1 - 0{,}9*10$ se obtendría un resultado imposible: p = -8

Distribución de probabilidad

es el conjunto de las p de todas los valores o modalidades que puede adoptar una variable X.
Veamos el caso más sencillo, el de una variable cualitativa:

--se establece el dominio de la variable (todas las modalidades)
--se calcula la p de cada modalidad
--se tabula y se representa gráficamente

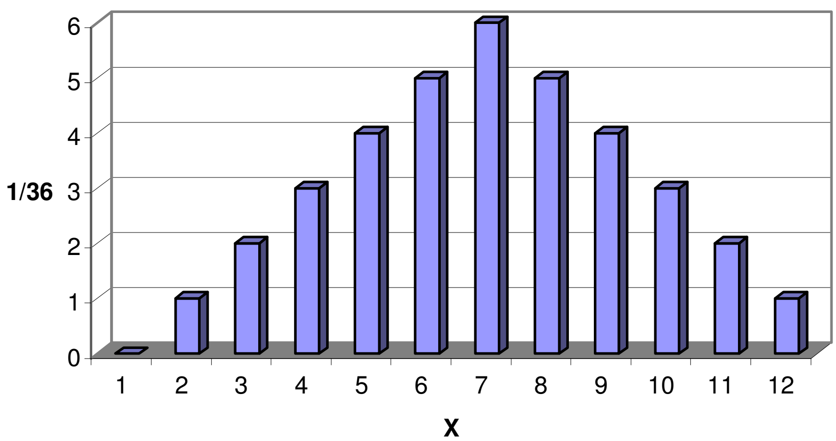
ejemplo: X = suma de puntos al tirar dos dados
dominio: hay 36 combinaciones posibles (zona sombreada)

		dado 1					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
d	*1*	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a	*2*	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	*3*	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
o	*4*	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
2	*6*	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

probabilidad:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
px	0	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

gráfico :



Método de Bayes

El modelo estadístico bayesiano se basa en probabilidades condicionadas y ha permitido el desarrollo, aún bastante imperfecto, del "diagnóstico por ordenador". A partir de las frecuencias de determinados síntomas en diversas enfermedades calcula la p de padecer una u otra enfermedad. Es un compleja especialidad dentro de la Estadística, cuyos detalles escapan a la intención de esta asignatura. Veremos su fórmula general y un ejemplo.

Fórmula de Bayes

$$p\left(A_x / E\right) = \frac{pA_x * p\left(E / A_x\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[pA_i * p\left(E / A_i\right)\right]}$$

pudiendo valer x entre 1 y n

Ejemplo

Se sabe que la presencia de determinados síntomas se da en el 60% de pacientes con la enfermedad A1, en el 30% de los que padecen la enfermedad A2 y en el 10% de los que tienen la enfermedad A3.
Al análisis E sale positivo en el 30% de los casos de A1, en el 70% de los casos de A2 y en el 70% de los de A3.
Si un paciente tiene esos síntomas y el análisis sale positivo, ¿qué probabilidades hay de que tenga una u otra enfermedad?

Enferm. (Ax)	pAx	p(E+/Ai)	pAx*p(E/Ai)	pAx/ E+
A1	0,6	0,3	0,18	0,18/0,46 = 0,391 = 39,1%
A2	0,3	0,7	0,21	0,21/0,46 = 0,456 = **45,6%**
A3	0,1	0,7	0,07	0,07/0,46 = 0,152 = 15,2%
		Suma .	0,46	

La enfermedad más probable es la A2, seguida de cerca por la A1 y más lejos por la A3.